ACADEMIE DE NANCY-METZ
UNIVERSITE DE NANCY II

I. C. N.

Concours 1984 — Durée : 4 heures

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Régime Général

1er exercice

On donne la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)(\sqrt{x}+1)}$

1) Démontrer que les intégrales $I = \int_0^1 f(x)\,dx$ et $J = \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ existent.

2) Pour $x > 0$ on définit la fonction F par $F(x) = \int_x^1 f(u)\,du$

a) Effectuer le changement de variable $t = \frac{1}{u}$ dans l'intégrale $F(x)$

b) Calculer $F(x) - F\left(\frac{1}{x}\right)$; en déduire l'existence et le calcul de l'intégrale $K = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$

2ème exercice

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n où n est un entier supérieur ou égal à 2. On tire successivement et avec remise 2 jetons de l'urne, on désigne par X et Y les variables aléatoires qui à chaque tirage font correspondre respectivement le plus petit et le plus grand des 2 nombres obtenus.

1) Soit $(a,b) \in \{1,2,\dots,n\}^2$, calculer la probabilité $p(a,b)$ de l'évènement $\{X = a\} \cap \{Y = b\}$

2) Déterminer les lois de probabilité des variables aléatoires X et Y.

3) On définit les matrices unicolonnes U et V par

$$U = \begin{pmatrix} p(X=1) \\ p(X=2) \\ \vdots \\ p(X=n) \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad V = \begin{pmatrix} p(Y=1) \\ p(Y=2) \\ \vdots \\ p(Y=n) \end{pmatrix}$$

Démontrer qu'il existe une matrice M indépendante de n qu'on déterminera telleque $V = M.U$

.../...

Problème

On désigne par $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels et par I la matrice unité. On dit qu'une partie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie les conditions $\mathcal{C}$ si les 3 conditions suivantes sont vérifiées :

- $I \in \mathcal{F}$
- $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de dimension 3
- $\mathcal{F}$ est une partie stable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pour la multiplication des matrices.

I) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$

1) Démontrer que les matrices $A^2, B^2, A.B$ et $B.A$ sont des combinaisons linéaires de I, A et B.

2) Démontrer que le sous-espace vectoriel $\mathcal{F}$ engendré par I, A, et B vérifie les conditions $\mathcal{C}$

II) Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$ où x, y, z et t sont 4 nombres réels.

1) Démontrer que (I, J, K) est une famille libre si et seulement si $(x-t)^2 + (y+z)^2 \neq 0$.

2) On suppose que J appartient à une partie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant les conditions $\mathcal{C}$.

- Démontrer qu'il existe x, y, z et t, qu'on ne cherchera pas à calculer, tels que (I, J, K) soit une base $\mathcal{F}$.
- Démontrer alors que $(I, J, K, J.K)$ est une famille libre. Conclure.

III) Soit une matrice U de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que pour tout nombre k réel $U \neq k\,I$.

1) On suppose qu'il existe une partie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant les conditions $\mathcal{C}$ et contenant U.

a) Démontrer qu'il existe une matrice V telle que (I, U, V) soit une base de $\mathcal{F}$; on ne cherchera pas à expliciter V.

Démontrer qu'il existe 3 nombres réels α, β et λ tels que $U.V = \alpha I + \beta U + \lambda V$.

Calculer $(U - \lambda I)(U.V - V.U)$

b) En admettant que $U.V \neq V.U$, démontrer que U possède une valeur propre réelle.

2) Réciproquement on suppose que U possède une valeur propre réelle.

Démontrer qu'il existe une partie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant les conditions $\mathcal{C}$ et contenant U.

-.-.-.-

208